

学校编码: 10384

分类号\_\_\_\_\_密级\_\_\_\_\_

学 号: 19020090153611

UDC\_\_\_\_\_

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

**MHD 方程组弱解的全局行为与能量耗散及可压  
N-S-P 方程组解的整体存在性**

**The Global Behavior and Energy Dissipation for Weak Solutions  
of MHD Equations and a Global Existence Result for the  
Compressible N-S-P Equations**

高 真 圣

指导教师姓名: 谭 忠 教授

专 业 名 称: 应 用 数 学

论文提交日期: 2012 年 4 月

论文答辩时间: 2012 年 6 月

学位授予日期: 2012 年 月

答辩委员会主席: \_\_\_\_\_

评 阅 人: \_\_\_\_\_

2012 年 月

厦门大学博硕士论文摘要库

# Doctoral      Dissertation



## The Global Behavior and Energy Dissipation for Weak Solutions of MHD Equations and a Global Existence Result for the Compressible N-S-P Equation

By Zhensheng Gao

**Supervisor:**      Professor Zhong Tan  
**Speciality:**      Partial Differential Equations  
**Institution:**    School of Mathematical Sciences  
                         Xiamen University  
                         Xiamen, P.R. China

June 2012

厦门大学博硕士论文摘要库

## 厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为( )课题(组)的研究成果,获得( )课题(组)经费或实验室的资助,在( )实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

## 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（        ） 1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于        年    月    日解密，解密后适用上述授权。

（        ） 2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年    月    日

厦门大学博硕士论文摘要库



## 中文摘要

等离子体在电磁场中的运动, 既应遵守电磁场的运动规律, 又要遵守流体力学的运动规律。一方面, 在流体力学方程组中必须加入电磁力的作用; 另一方面, 在描述电磁场的麦克斯韦方程组中必须加入由于导电流体(等离子体)运动所产生的电流。这样联立起来的方程组就是磁流体力学的基本方程组, 称为磁流体力学方程组。自引力作用下或静电斥力作用下、有粘可压的流体运动模型可用 Navier-Stokes-Poisson 方程组近似描述。早在十九世纪, 对于这些方程组, 引起很多数学工作者的研究, 并且得到了很多有意义的结果, 其中包括存在性、唯一性、稳定性、稳态解的存在性、多解问题。本文主要是从数学理论方面研究 MHD 方程组和 N-S-P 方程, 主要内容包含下面三个方面:

1. 研究可压缩磁流体方程组的弱解在三维有界区域上关于时间的全局行为。对绝热指数进行适当限制, 在有界外力作用下证明了总能量是有界的, 并得到了轨迹的渐进行为以及全局紧吸引子的存在性。
2. 考虑 3D MHD 方程组的弱解的局部能量等式。针对解缺乏光滑性, 我们定义了一个耗散项  $D(\mathbf{u}, \mathbf{B})$ , 并得到了弱解的局部能量等式。最后, 考虑了 2D 情形。
3. 研究  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) 空间上可压 N-S-P 方程组解的全局适定性。在 Besov 空间中, 得到强解的整体存在性和唯一性, 并指出初始速度有着和不可压齐次 N-S 方程情形时一样的临界指标。

**关键字** 可压, MHD 方程组; 弱解; 能量估计; 有界吸集; 闭轨迹; 能量耗散; 不可压; 全局存在性; N-S-P 方程组; 强解; 适定性。

厦门大学博硕士论文摘要库

## Abstract

The motion of plasma, in the electromagnetic field, which shall comply with the motion law of the electromagnetic field, and shall comply with the motion law of fluid mechanics. On the one hand, the fluid dynamic equations must be added into the electromagnetic force action; on the other hand, the current must be added into the maxwell's equations. The simultaneous equations is the magnetic mechanics basic equations, and called magnetohydrodynamics equations. The motion of compressible, viscous self-gravitating or electrostatic fluids can be expressed by Navier-Stokes-Poisson equations. In the 19th century, this two equations, have caught lots of mathematician's research, and they have gotten various results, including existence, uniqueness, stability, the existence for stationary solutions. In this thesis, our work is focused on the mathematical theoretical investigation of the MHD and N-S-P equations, the results of this thesis can be brought under three headings:

1. Consider the global behavior of weak solutions of the equations of compressible magnetohydrodynamic flows in time in a bounded three-dimension domain-arbitrary forces. Under certain restrictions imposed on the adiabatic constant  $\gamma$ , proved that total energy is still bounded when the external force is bounded, and obtained the asymptotic behavior of trajectories and the existence of global compact attractors.
2. Study the local equation of energy for weak solutions of 3D (MHD) equations mainly. Define a dissipation term  $D(\mathbf{u}, B)$  which stems from an eventual lack of smoothness in the solution, and then get a local equation of energy for weak solutions of 3D (MHD) equations. Finally Consider the 2D case at the end of this paper.
3. Study the global well-posedness issue for the barotropic compressible Navier-Stokes-Poisson system in the whole space  $\mathbb{R}^N$  with  $N \geq 3$ . The global existence and uniqueness of the strong solution is shown in the framework of hybrid Besov spaces. The initial velocity has the same critical regularity index as for the incompressible homogeneous Navier-Stokes equations. The proof lies on uniform estimate for a mixed hyperbolic/parabolic linear system with a convection term.

**Keywords:** compressible; MHD equations; weak solution; bounded absorbing set; closed trajectory; short trajectory; attractor; energy dissipation; incompressible; global existence; Navier-Stokes-Poisson equation; strong solution; well-posedness.

厦门大学博硕士论文摘要库

# 目 录

中文摘要	i
Abstract	iii
目录	v
Contents	vii
第一章 绪论	1
§1.1 可压缩等熵流体 Navier-Stokes 方程组	1
§1.2 磁流体力学方程组	3
§1.2.1 简介	3
§1.2.2 磁流体力学方程组	4
§1.3 Navier-Stokes-Poisson 方程组	9
§1.4 本文研究动机与主要结果	11
第二章 基础知识	13
§2.1 符号约定	13
§2.2 基本结论	14
第三章 可压磁流体方程组弱解的全局行为	23
§3.1 引言	23
§3.2 定理3.1.1的证明	27
§3.2.1 预备知识	27
§3.2.2 能量估计	28
§3.2.3 命题3.2.1的证明	33
§3.2.4 定理3.1.1的证明	34
§3.3 定理3.1.2-3.1.4的证明	35
§3.3.1 函数列的基本估计及收敛	35
§3.3.2 有关密度与有效粘通量的一些结论	38

§3.3.3 震荡传播 .....	42
§3.3.4 定理3.1.2 的证明 .....	45
§3.3.5 定理3.1.3 和定理3.1.4 的证明 .....	45
<b>第四章 不可压磁流体方程组弱解的能量耗散</b>	<b>47</b>
§4.1 引言 .....	47
§4.2 MHD方程组弱解的局部能量方程 .....	48
§4.2 2 D 情形 .....	54
<b>第五章 高维空间上可压N-S-P方程组解的整体存在性</b>	<b>55</b>
§5.1 引言 .....	55
§5.2 Littlewood-Paley 定理和函数空间 .....	57
§5.3 原系统的重新描述 .....	59
§5.4 线形模型的估计 .....	61
§5.4.1 低频项 .....	61
§5.4.2 高频项 .....	62
§5.4.3 阻尼效应 .....	63
§5.4.4 光滑效应 .....	64
§5.5 全局存在性和唯一性结果 .....	65
<b>参考文献</b>	<b>75</b>
<b>附录</b>	<b>81</b>
<b>致谢</b>	<b>83</b>

# Contents

<b>Abstract (in Chinese)</b>	<b>i</b>
<b>Abstract (in English)</b>	<b>iii</b>
<b>Contents (in Chinese)</b>	<b>v</b>
<b>Contents (in English)</b>	<b>vii</b>
<b>Chapter 1 Preface</b>	<b>1</b>
§1.1 The Navier-Stokes Equations of Compressible Isentropic Fluids . . . . .	1
§1.2 Magnetohydrodynamic Equations . . . . .	3
§1.2.1 Introduction . . . . .	3
§1.2.2 Magnetohydrodynamic Equations . . . . .	4
§1.3 Navier-Stokes-Poisson Equations . . . . .	9
§1.4 Research Motivation and Main Works . . . . .	11
<b>Chapter 2 Preliminaries</b>	<b>13</b>
§2.1 Notations . . . . .	13
§2.2 Fundamental Conclusions . . . . .	14
<b>Chapter 3 Complete Bounded Trajectories and Attractors for Compressible Magnetohydrodynamic Equations</b>	<b>23</b>
§3.1 Introduction . . . . .	23
§3.2 Proof of the Theorem 3.1.1 . . . . .	27
§3.2.1 Preliminaries . . . . .	27
§3.2.2 Energy estimates . . . . .	28
§3.2.3 Proof of Proposition 3.2.1 . . . . .	33
§3.2.4 Proof of the Theorem 3.1.1 . . . . .	34
§3.3 Proof of the Theorem 3.1.2-3.1.4 . . . . .	35
§3.3.1 Basic Estimates and Convergence of the Sequence . . . . .	35

§3.3.2	Some results about the density and the effective viscous flux . . . . .	38
§3.3.3	Propagation of Oscillations . . . . .	42
§3.3.4	The proof of Theorem 3.1.2 . . . . .	45
§3.3.5	The Proof of Theorem 3.1.3-3.1.4 . . . . .	45
<b>Chapter 4</b>	<b>Energy Dissipation for Weak Solutions of Incompressible MHD Equations</b>	<b>47</b>
§4.1	Introduction . . . . .	47
§4.2	The local equation of energy for weak solution of MHD equations . . . . .	48
§4.2	The 2D case . . . . .	54
<b>Chapter 5</b>	<b>A global existence result for the compressible Navier-Stokes-Poisson equation in three and higher dimensions</b>	<b>55</b>
§5.1	Introduction . . . . .	55
§5.2	Littlewood-Paley theory and functional spaces . . . . .	57
§5.3	Reformulation of the original system . . . . .	59
§5.4	The estimates for the linear model . . . . .	61
§5.4.1	Low frequencies . . . . .	61
§5.4.2	High frequencies . . . . .	62
§5.4.3	The damping effect . . . . .	63
§5.4.4	The smoothing effect 3.1.2 . . . . .	64
§5.5	A global existence and uniqueness result . . . . .	65
<b>References</b>		<b>75</b>
<b>Appendix</b>		<b>81</b>
<b>Acknowledgements</b>		<b>83</b>



Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to [etd@xmu.edu.cn](mailto:etd@xmu.edu.cn) for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库